Επαναληπτικό φυλλάδιο ΚΡΟΥΣΕΙΣ:

① α) Σε κάθε κρούση ισχύει η ΑΔΟ: $\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \Leftrightarrow$

$\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{1(τελ)} + \vec{P}_{2(τελ)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{P}_{1(τελ)} - \vec{P}_{1(αρχ)} = \vec{P}_{2(αρχ)} - \vec{P}_{2(τελ)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta\vec{P}_1 = -(\vec{P}_{2τελ} - \vec{P}_{2αρχ}) = -\Delta\vec{P}_2$ (το ένα σώμα χάνει τόση ορμή όση κερδίζει το δεύτερο).

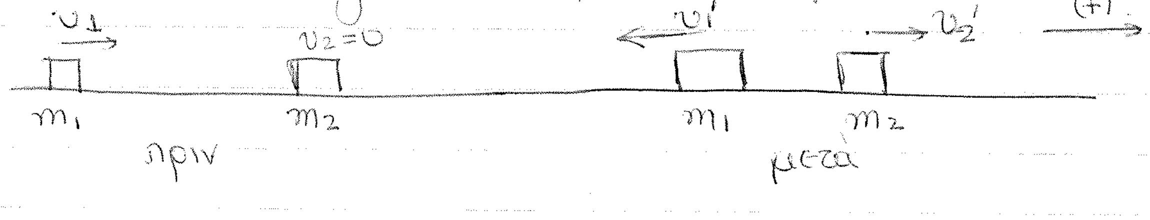
β) Ελαστική κρούση σημαίνει ΑΔΚΕ: $K_{αρχ} = K_{τελ} \Leftrightarrow$

$K_{1(αρχ)} + K_{2(αρχ)} = K_{1(τελ)} + K_{2(τελ)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K_{1(τελ)} - K_{1(αρχ)} = K_{2(αρχ)} - K_{2(τελ)} \Leftrightarrow$

$\Delta K_1 = -\Delta K_2$: η κινητική ενέργεια που χάνει το 1ο σώμα κερδίζεται από το 2ο.

② Εφόσον οι κρούσεις είναι μετωπικές, όλα τα διανύσματα των ταχυτήτων βρίσκονται στην ίδια ευθεία· άρα τα διανύσματα βγαίνουν ορίζοντας μια φορά ως θετική.



2α) όπως στο 1α αποδεικνύουμε ότι $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \Leftrightarrow$

$-1{,}6\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \Leftrightarrow \Delta\vec{P}_2 = 1{,}6\vec{P}_1$

β) προαιρετικό

($\Delta\vec{P}_2 = 1{,}6\vec{P}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_2' - \cancel{\vec{P}_{2(αρχ)}}^{0} = 1{,}6\vec{P}_1 \Leftrightarrow$ άρα $υ_2'$ έχει την ίδια φορά με την $υ_1$)

$\Delta\vec{P}_1 = -1{,}6\vec{P}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_1' - \vec{P}_1 = -1{,}6\vec{P}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_1' = \vec{P}_1 - 1{,}6\vec{P}_1 = -0{,}6\vec{P}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{m_1}\vec{υ}_1' = -0{,}6\cancel{m_1}\vec{υ}_1$. Η $υ_1'$ έχει αντίθετη φορά με τη $υ_1$ και μέτρο:

$\boxed{v_1' = 0,6 v_1}$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει η ΔΚΕ. Άρα:

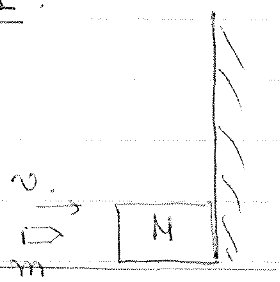
$$K_{1αρχ} + \cancel{K_{2αρχ}}^{0} = K_1' + K_2'$$

$$K_2' = K_{1αρχ} - K_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^2 - 0,36 v_1^2 \right) = \frac{1}{2} m v_1^2 (1 - 0,36) =$$

$$= K_1 \cdot 0,64 = \frac{\cancel{64}^{16}}{\cancel{100}_{25}} \cdot K_1 = \frac{16}{25} K_1$$

3) Σχήμα 1:



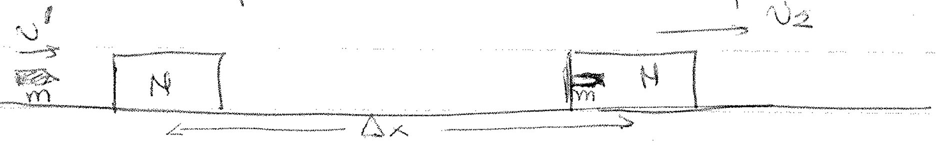
Εδώ δεν ισχύει η διατήρηση της ορμής, γιατί η κάθετη δύναμη επαφής ανάμεσα στον τοίχο και το σώμα μάζας Μ δε μπορεί ν' αγνοηθεί.

Μεταξύ του βλήματος και του σώματος Μ αναπτύσσεται δύναμη τριβής κι εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ για το βλήμα έχουμε:

$$\cancel{K_{τελ}}^{0} - K_{αρχ} = W_T \Leftrightarrow K_{αρχ} = -W_T = T \cdot \ell_{εισχ}$$

η ελάχιστη κινητική ενέργεια αντιστοιχεί σε στιγμιότυπο του βλήματος μόλις εισχωρήσει ολόκληρο μέσα στο ~~[illegible]~~ σώμα Μ.

Όταν το σώμα Μ είναι ελεύθερο να κινηθεί, τότε:



Εδώ ισχύει η ΑΔΟ: $\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \Leftrightarrow m_β \vec{v}' = (m+M) \vec{U}_2 \Leftrightarrow$

$$U_2 = \frac{m}{4m} v' = \frac{1}{4} v'$$

ΘΜΚΕ για το βλήμα: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v'^2 = W_T = -T\cdot(\Delta x + \ell_{βλ})$$

$$\frac{1}{2} m \frac{v'^2}{16} - \frac{1}{2} m v'^2 = -T\cdot\Delta x - T\cdot \ell_{βλ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2} m v'^2 = -T\Delta x - T\cdot \ell_{βλ} \quad (1)$$

ΘΜΚΕ για το Μ: $K_{τελ} - \cancel{K_{αρχ}}^{\,0} = W_{T'}$ (T, T' δράση αντίδραση)

$$\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot v_2^2 = T'\Delta x = T\cdot\Delta x$$

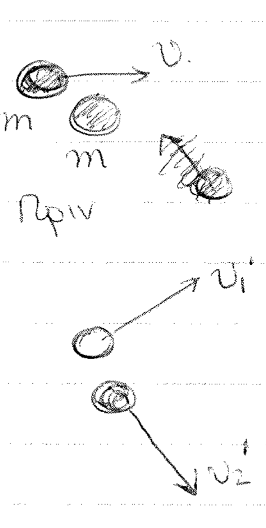
$$\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot \frac{v'^2}{16} = T\cdot\Delta x$$

$$\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2} m v'^2 = T\cdot\Delta x \quad (2)$$

(1) + (2) $\quad -\frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,4}}\cdot K'_{αρχ} = -T\cdot \ell_{βλ} = -K \Leftrightarrow \boxed{K'_{αρχ} = \frac{4}{3}K}$

όπου έχουμε υπόθεση ότι η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων δεν εξαρτάται από την ταχύτητά τους αλλά μόνο από τη φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή.

4)



Εδώ το πλάγια εννοεί έκκεντρα αφού η 2η σφαίρα είναι ακίνητη.

$$\vec{p}_{1αρχ} + \cancel{\vec{p}_{2αρχ}}^{\,0} = \vec{p}_{1τελ} + \vec{p}_{2τελ}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΕΔΩ ΔΕΝ ΒΓΑΙΝΟΥΝ ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤ.

Άρα $\vec{p}_{1αρχ}^{\,2} = (\vec{p}_{1τελ} + \vec{p}_{2τελ})^2 = \vec{p}_{1τελ}^{\,2} + 2\vec{p}_{1τελ}\cdot\vec{p}_{2τελ} + \vec{p}_{2τελ}^{\,2}$

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_{1\tau\varepsilon\lambda}^2}{2m} + 2\frac{p_{1\tau\varepsilon\lambda}\cdot p_{2\tau\varepsilon\lambda}\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{2m} + \frac{p_{2\tau\varepsilon\lambda}^2}{2m}$$

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{1\tau\varepsilon\lambda} + \cancel{2}\frac{p_{1\tau\varepsilon\lambda}\cdot p_{2\tau\varepsilon\lambda}}{\cancel{2}m}\sigma\upsilon\nu\varphi + K_{2\tau\varepsilon\lambda} \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική · άρα $K_{\alpha\rho\chi} = K_{1\tau\varepsilon\lambda} + K_{2\tau\varepsilon\lambda}$ (2).

$(1), (2) \Rightarrow \frac{p_{1\tau\varepsilon\lambda}\cdot p_{2\tau\varepsilon\lambda}}{m}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$

β) Θέλω τη γωνία $\vec{p}_1, \vec{p}_1{}'$ · άρα:

$\vec{p}_1 = \vec{p}_{1\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_{2\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_1{}' = \vec{p}_2{}'$ ΔΕΝ ΒΓΑΙΝΟΥΝ ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_1{}')^2 = \vec{p}_2{}'^2 \Leftrightarrow \vec{p}_1{}^2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1{}' + \vec{p}_1{}'^2 = \vec{p}_2{}'^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{p}_1{}^2}{2m} - \cancel{2}\frac{p_1\cdot p_1'}{\cancel{2}m}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{p_1'^2}{2m} = \frac{p_2'^2}{2m}$$

$$K_1 - \frac{\cancel{m}\upsilon_1\cdot m\upsilon_1'}{\cancel{m}}\sigma\upsilon\nu\theta + K_{1\tau\varepsilon\lambda}' = K_2' \quad (5)$$

Αλλά: ΑΚΕ $\left.\begin{matrix} K_1 = K_1' + K_2' \\ K_2' = 3K_1' \end{matrix}\right\}$ $K_1 = 4K_1'$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon_1^2 = 4\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon_1'^2$

$\upsilon_1 = 2\upsilon_1' \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{2}}$ (3)

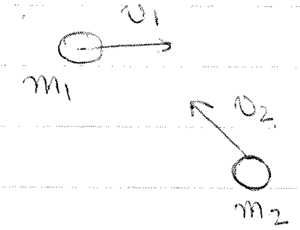
$K_2' = 3K_1'$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon_2'^2 = 3\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon_1'^2 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_2' = \sqrt{3}\cdot\upsilon_1' = \frac{\sqrt{3}\cdot\upsilon_1}{2}}$ (4)

$$(3),(4),(5) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon_1^2 - \cancel{m}\frac{\upsilon_1^2}{\cancel{2}}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\frac{\upsilon_1^2}{4} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\cdot\frac{3\upsilon_1^2}{4}$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu\theta + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 60^\circ.$$

(5)



$m_Σ = m_1 + m_2 = 2m_1 \Rightarrow m_2 = m_1 = m$

ΑΔΟ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_Σ$ ΔΕΝ ΒΓΑΙΝΟΥΝ ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$p_1 = p_2 = p_Σ$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = \vec{p}_Σ^{\,2}$$

$$\cancel{\vec{p}_1^{\,2}} + 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 + \vec{p}_2^{\,2} = \cancel{\vec{p}_Σ^{\,2}}$$

$$2p_1 \cdot p_2 \cdot συνφ + p_2^2 = 0 \Leftrightarrow συνφ = \frac{-p_2^2}{2p_2^2} = -\frac{1}{2}$$

$φ = 120°$

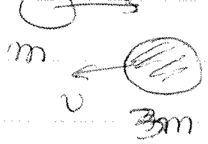
β)

$$ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot 2m}\ \frac{p_Σ^2}{2 \cdot 2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} =$$

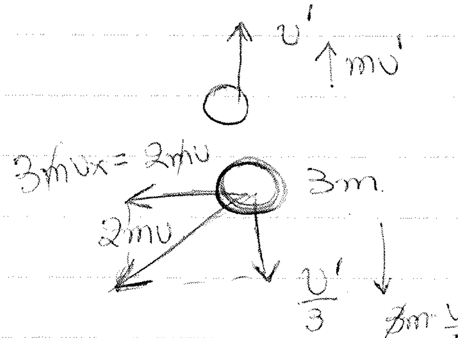
$$= \frac{p_1^2}{4m} - \frac{p_1^2}{m} = -\frac{3}{4}\frac{p_1^2}{m} = -\frac{3}{2}\frac{p_1^2}{2m} = -\frac{3}{2}K_1$$

Το (−) σημαίνει απώλεια κινητικής ενέργειας.
Άρα η απώλεια κινητικής ενέργειας λόγω πλαστικής κρούσης είναι $\frac{3K_1}{2}$.

γ)



Πριν.



Από ΑΔΟ η 2η σφαίρα θα έχει συνιστώσα στον yy' αντίθετη της ορμής της Α και η x συνιστώσα θα είναι η $(p_{αρχ})_x$.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

xx' $\quad p_1 - p_2 = p_{2x}' \Leftrightarrow p_{2x}' = mv - 3mv = -2mv$

yy' $\quad 0 = p_{1y}' + p_{2y}' \Leftrightarrow p_{2y}' = -p_{1y}'$

ΔΚΕ: $K_{1αρχ} + K_{2αρχ} = K_{1τελ} + K_{2τελ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}3mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}3m\left[\left(\frac{v'}{3}\right)^2 + \left(\frac{2v}{3}\right)^2\right] \Leftrightarrow$

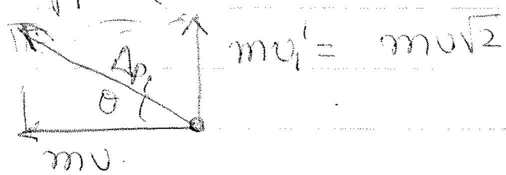
$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon^2 + \frac{1}{\cancel{2}}3\cancel{m}\upsilon^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\upsilon'^2 + \frac{1}{\cancel{2}}3\cancel{m}\left(\frac{\upsilon'^2}{9} + \frac{4\upsilon^2}{9}\right)$$

$$4\upsilon^2 = \upsilon'^2 + \frac{\upsilon'^2}{3} + \frac{4\upsilon^2}{3} \Leftrightarrow \frac{8\upsilon^2}{\cancel{3}} = \frac{4\upsilon'^2}{\cancel{3}} \Leftrightarrow \boxed{\upsilon' = \upsilon\sqrt{2}}$$

και: $\upsilon_B = \sqrt{\frac{\upsilon'^2}{9} + \frac{4\upsilon^2}{9}} = \sqrt{\frac{2\upsilon^2}{9} + \frac{4\upsilon^2}{9}} = \sqrt{\frac{6\upsilon^2}{9}} = \sqrt{\frac{2\upsilon^2}{3}} =$

$$= \frac{\upsilon\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\upsilon\sqrt{6}}{3}$$

β) $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' + (-\vec{p}_1)$



$\Delta p_1 = \sqrt{m^2\upsilon^2 \cdot 2 + m^2\upsilon^2} = m\upsilon\sqrt{3}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{m\upsilon\sqrt{2}}{m\upsilon} = \sqrt{2}$